1 Potencijali elektromagnetnog polja

Elektromagnetno polje, kao jedinstven fizički proces, opisujemo sa dvije vektorske funkcije: $\vec{E}$ i $\vec{H}$ (odnosno $\vec{D}$ i $\vec{B}$). U opštem slučaju svaki od ovih vektora ima po tri komponente, što praktično znači da utvrđivanje distribucije (energije) elektromagnetnog polja znači nalaženje 6 skalarnih funkcija! (odnosno 6 skalarnih nepoznatih veličina)
Zato bi bilo veoma korisno da se broj nepoznatih svede na naki manji broj! Pokažimo da je to moguće koristeći (logično) Maksvelove jednačine. Poći ćemo od Treće jednačine koja, kao što znamo, izražava solenoidnost magnetnog polja (zatvorenost linija polja) a čiji matematički zapis ima oblik

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad (1)$$

Iz vektorske analize je poznat identitet

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0 \qquad (2)$$

gdje je $\vec{a}$ neka vektorska funkcija.
Odavde proizilazi prost zaključak (matematički) da bi se, u našem slučaju, vektor $\vec{B}$ mogao napisati u obliku

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \qquad (3)$$

Ovako uvedena pomoćna funkcija $\vec{A}$ zove se **magnetni vektorski potencijal** elektromagnetnog polja.
Nakon uvođenja pomoćne funkcije $\vec{A}$ pogledajmo šta će nam dati Druga Maksvelova jednačina; ona glasi:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ , te je} \qquad (4)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = -\operatorname{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (5)$$

(jer je prostorni operator rot nezavistan od vremenskog operatora $\partial/\partial t$), pa je

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \operatorname{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \text{ , ili} \qquad (6)$$

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (7)$$

Ovo nam, opet matematički gledano, omogućava dalje da napišemo

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V \qquad (8)$$

Pri čemu ćemo uvedenu pomoćnu skalarnu funkciju V nazvati **skalarni električni potencijal**, te je najzad

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (9)$$

Dakle, uvodeći pojmove kao što su skalarni električni i vektorski magnetni potencijal mi smo stvorili mogućnost da proces elektromagnetnog polja opišemo sa dvije pomoćne funkcije: vektorskom $\vec{A}$ i skalarnom V. Prva sadrži 3 nepoznate A_x, A_y i A_z, a druga samo jednu nepoznatu V. Znači, problem distribucije energije elektromagnetnog polja sveli smo sa 6 na 4 nepoznate!

Ovako uvedene pomoćne funkcije $\vec{A}$ i V zovu se jednim imenom: **potencijali elektromagnetnog polja.**

Poznajući ove funkcije komponente elektromagnetnog polja izračunavamo jednostavno iz relacija (9) i (3).

Zato je sada potrebno utvrditi kakve diferencijalne jednačine zadovoljavaju potencijali elektromagnetnog polja, odnosno iz kakvih relacija možemo dobiti ove potencijale.

Vektorsku funkciju $\vec{A}$ možemo odrediti iz Prve Maksvelove jednačine za linearne sredine:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\ ,\ \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}\ ,\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{10}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu\vec{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{11}$$

Uvrštavanjem potencijala elektromagnetnog polja daje:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \mu\vec{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\operatorname{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \tag{12}$$

Iz matematike je poznato da je:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a} \tag{13}$$

Te gornji izraz postaje

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu\vec{J} - \varepsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\ \text{, odnosno} \tag{14}$$

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}\right] = -\mu\vec{J} \tag{15}$$

Time, shodno teoremi Helmholca, vektorska funkcija $\vec{A}$ nije jednoznačno određena budući da treba odrediti i njenu divergenciju.

Da li sada ima razloga fizičke prirode koji nas primoravaju da $\operatorname{div}\vec{A}$ uvedemo na strogo određen način? Obzirom da je $\vec{A}$ uvedeno kao pomoćna vektorska funkcija, očigledno takvih ograničenja nema!

S toga $\operatorname{div}\vec{A}$ možemo uvesti na takav način da što više pojednostavimo diferencijalnu jednačinu koja određuje raspodjelu za $\vec{A}$. Očigledno se to postiže uz uslov da je:

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t} \tag{16}$$

Ovako uveden uslov zove se: **„Lorencov uslov kalibracije potencijala“,** a često se zove i „jednačinom kontinuiteta potencijala“ zbog <u>formalne</u> sličnosti sa jednačinom kontinuiteta za elektricitet: $\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Tako smo, uz ovaj Lorencov uslov, dobili:

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \tag{17}$$

Ova diferencijalna jednačina nam omogućava da se iz zadate raspodjele struje nađe vektor $\vec{A}$, a time i vektor $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$!
Sada treba još odrediti i odgovarajuću diferencijalnu jednačinu za električni potencijal V.
U tom cilju poći ćemo od Četvrte Maksvelove jednačine:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{18}$$

Koja za linearne sredine glasi

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{19}$$

S obzirom na relaciju (316) možemo dalje pisati

$$-\operatorname{div}\left[\operatorname{grad}V + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{20}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}V + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{21}$$

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{22}$$

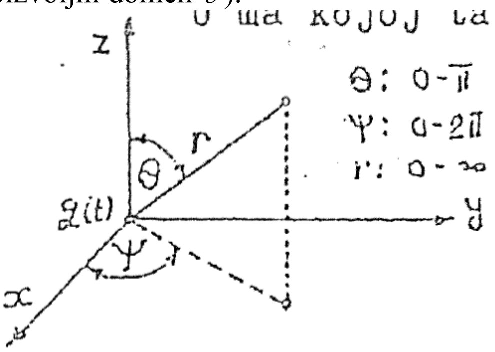
$$\Delta V - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{23}$$

Ova diferencijalna jednačina nam omogućava da se iz zadate raspodjele slobodnog naelektrisanja ρ odredi skalar V ! Inače, po svojoj formi ona je identična gornjoj diferencijalnoj jednačini za vektorski potencijal $\vec{A}$.
Kada se odrede pomoćne funkcije $\vec{A}$ i V nije teško odrediti komponente elektromagnetnog polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ koristeći relacije (9) i (3).
Diferencijalne jednačine koje smo dobili bile su poznate znatno prije Maksvelovih jednačina. One su poznate kao <u>Dalamberove</u> ili <u>talasne</u> diferencijalne jednačine. Ako su desne strane različite od nule onda se zovu nehomogenim diferencijalnim jednačinama.
Komponenta $-\operatorname{grad}V$ potiče od slobodnog naelektrisanja i ona je izvornog karaktera (linije počinju na pozitivnom a završavaju se na negativnom naelektrisanju). Druga komponenta $-\partial\vec{A}/\partial t$ potiče od struje (tj od promjenljivog magnetnog polja) i, pošto su linije magnetnog polja zatvorene, to znači da je ova komponenta vrtložnog karaktera, (tj da su i njoj linije zatvorene). Dakle: **<u>promjenljivo električno polje ima i bezvrtložnu i vrtložnu komponentu</u>**!

2 Potencijali elektromagnetnog polja u neograničenoj homogenoj sredini. Talasni karakter elektromagnetnog polja

2.1 A:

Posmatraćemo najjednostavniji slučaj elektromagnetnog polja. To je slučaj kada je izvor polja vremenski promjenljivo tačkasto naelektrisanje koje se nalazi u neograničenoj homogenoj linearnoj sredini. Iako je promjenljivo tačkasto naelektrisanje najprostiji mogući izvor elektromagnetnog polja a neograničena homogena sredina samo jedna idealizacija, jednom riječju, iako razmatramo najjednostavniji slučaj elektromagnetnog polja to ipak ne znači da zaključci, do kojih dođemo kod ovakvog polja, neće imati opšti karakter! (Ovaj slučaj smatramo najprostijim više s obzirom na desnu stranu Dalamberovih diferencijalnih jednačina za potencijale polja nego s obzirom na složenost ovakvog elektromagnetnog polja kao fizičkog procesa!)
Odredimo najprije električni potencijal ovog polja u nekoj tački na odstojanju r od koordinatnog početka. (Za ovakvu vrstu problema koje karakteriše sferna simetrija logično je problem posmatrati u sfernom koordinatnom sistemu.) U centru ovog koordinatnog sistema smjestićemo vremenski promjenljivo tačkasto naelektrisanje i pretpostavićemo da je ono ujedno i jedino naelektrisanje kako u bližoj tako i u beskonačno dalekoj okolini (iako ćemo mi posmatranja ograničiti na neki konačni ali proizvoljni domen υ).



U ma kojoj tački na rastojanju r imaćemo diferencijalnu jednačinu:

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \;,\; c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{24}$$

Očigledno je da se svaka tačka na sferi poluprečnika r nalazi u ravnopravnom položaju u odnosu na naelektrisanje $q(t)$. S toga slijedi zaključak: potencijal V proizvoljne tačke na sferi r neće zavisiti ni od θ ni od ψ. A to opet znači da je

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \tag{25}$$

Razumije se ako bi uzeli drugu sferu, sa drugim r, potencijal na njoj ne bi bio isti (iako bi bili isti uglovi – koordinate θ i ψ). Znači, potencijal V zavisi od r-a. No, on zavisi i od vremena t, pošto i naelektrisanje zavisi od t. Zato možemo reći: potencijal V zavisi i od r i od t što se može napisati matematički u formi:

$$V = V(r,t) \tag{26}$$

Laplasijan ΔV u sfernim koordinatama glasi:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2)\frac{\partial V}{\partial r} + r^2\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial V}{\partial r})\right] = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \tag{27}$$

Uvrštavanje izraza za ΔV u polaznu diferencijalnu jednačinu daje:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{28}$$

Da bi još više uprostili ovu diferencijalnu jednačinu uvedimo smjenu u obliku funkcije:

$$V(r,t) = \frac{f(r,t)}{r} \tag{29}$$

Nalaženje odgovarajućih parcijalnih izvoda i njihovo uvrštavanje u gornjoj diferencijalnoj jednačini daje sledeće rezultate:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{f_r^{'}\cdot r - f}{r^2} = \frac{f_r^{'}}{r} - \frac{f}{r^2} \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{f_r^{''}\cdot r - f_r^{'}}{r^2} - \frac{f_r^{'}\cdot r^2 - 2rf}{r^4} = \frac{f_r^{''}}{r} - 2\frac{f_r^{'}}{r^2} + 2\frac{f}{r^3} \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} \tag{32}$$

$$\frac{f_r^{''}}{r} - \cancel{2\frac{f_r^{'}}{r^2}} + \cancel{2\frac{f}{r^3}} + \cancel{\frac{2}{r}\frac{f_r^{'}}{r}} - \cancel{\frac{2}{r}\frac{f_r^{'''}}{r^2}} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} = 0 \text{ ; konačno} \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{34}$$

Dobijena jednačina predstavlja Dalamberovu ili talasnu homogenu diferencijalnu jednačinu. Rješenje ovakve diferencijalne jednačine je svaka funkcija f koja zavisi od argumenta

$$t - \frac{r}{c} \tag{35}$$

Tj svaka funkcija oblika

$$f(t - \frac{r}{c}) \tag{36}$$

A isto tako i svaka funkcija oblika

$$f(t + \frac{r}{c}) \text{ !} \tag{37}$$

Provjerimo. Označićemo sa: $u = t - \frac{r}{c}$; tada je:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{c}f_u^{'} \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial r}(-\frac{1}{c}f_u^{'})=+\frac{1}{c^2}f_u^{''} \tag{39}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=f_u^{'}\cdot 1=f_u^{'} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=f_u^{''} \tag{40}$$

Uvrštavanjem u Dalamberovu diferencijalnu jednačinu dobijamo identitet. Analogno se dokazuje da f može biti i svaka funkcija oblika $f(t+\frac{r}{c})$.

Konstatovali smo, dakle, da je

$$V(r,t)=\frac{f(t-r/c)}{r} \tag{41}$$

No, isto tako je logično primijetiti da funkcija f mora zavisiti i od tačkastog naelektrisanja $q(t)$ jer upravo ono je uzročnik polja.

Zato je korektno napisati

$$V(r,t)=\frac{f\left[q\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{r} \tag{42}$$

Ovakvo rješenje omogućava sledeći zaključak: potencijal, na nekom rastojanju r od tačkastog naelektrisanja, i u trenutku t, ne stvara ona vrijednost naelektrisanja u tom trenutku t, već vrijednost naelektrisanja $q\left(t-\frac{r}{c}\right)$, tj ona vrijednost naelektrisanja koja je postojala $\frac{r}{c}$ sekundi ranije! Drugi riječima, vrijednost potencijala „kasni“ za vrijednošću naelektrisanja koje ga stvara! Stoga se vrijeme $\frac{r}{c}$ može nazvati vremenom kašnjenja potencijala za njegovim izvorom!

U tačkama vrlo bliskim naelektrisanju q kao izvoru elektromagnetnog polja $(r\to 0)$ i vrijeme kašnjenja $\frac{r}{c}\to 0$, što znači da se potencijal može svesti na dobro poznatu formulu za potencijal tačkastog naelektrisanja

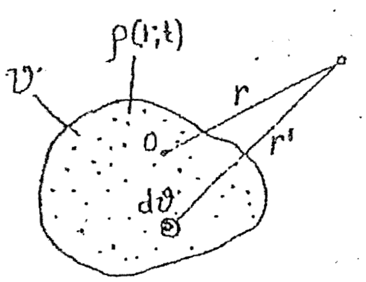
$$V(r,t)=\frac{q(t)}{4\pi\varepsilon r} \tag{43}$$

Međutim, u tačkama na proizvoljnom rastojanju r, u kojima ne možemo zanemariti vrijeme kašnjenja, potencijal će biti:

$$V(r,t)=\frac{q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon r} \tag{44}$$

Dakle, u opštem slučaju tačkastog naelektrisanja funkcija potencijala je data gornjom relacijom.

Pogledajmo sada kakav će biti oblik funkcije potencijala kada umjesto tačkastog naelektrisanja imamo slobodno naelektrisanje oblika $\rho(r,t)$. Koliki će biti potencijal u proizvoljnoj tački?



Uočimo mali element $d\upsilon$, te je $dq = \rho d\upsilon$. Neka se ovo elementarno naelektrisanje nalazi na rastojanju r' od tačke u kojoj izračunavamo potencijal. Potencijal od ovog elementarnog naelektrisanja u posmatranoj tački će biti:

$$dV(r,t) = \frac{\rho(t-\frac{r}{c})d\upsilon}{4\pi\varepsilon r'} \tag{45}$$

Ukupni potencijal, od svih elementarnih naelektrisanja, zapreminski raspoređenih u domenu υ a vremenski promjenljivih, biće:

$$V(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\upsilon}\frac{\rho(t-\frac{r'}{c})}{r'}d\upsilon \tag{46}$$

2.2 B:

Nađimo, sada, magnetni vektorski potencijal od prostornog raspoređenog strujnog toka unutar nekog domena υ, pri čemu je strujni tok i vremenski promjenljiv. Dakle, neka je $\vec{J} = \vec{J}(r,t)$.

Kako je Dalamberova diferencijalna jednačina za magnetni vektorski potencijal svojom formom identičan onoj za skalarni električni potencijal, to je matematički logično da su im i rješenja istog oblika! Dakle, za magnetni vektorski potencijal imamo

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \tag{47}$$

Kako su veličine $\vec{A}$ i $\vec{J}$ date sa

$$\vec{A} = A_x\vec{i}_x + A_y\vec{i}_y + A_z\vec{i}_z \tag{48}$$

$$\vec{J} = J_x\vec{i}_x + J_y\vec{i}_y + J_z\vec{i}_z \tag{49}$$

To dalje znači da se gornja vektorska diferencijalna jednačina raspada na 3 skalarne:

$$\Delta A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_x}{\partial t^2} = -\mu J_x \tag{50}$$

$$\Delta A_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_y}{\partial t^2} = -\mu J_y \tag{51}$$

$$\Delta A_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_z}{\partial t^2} = -\mu J_z \tag{52}$$

S obzirom na gornju primjedbu o sličnosti formi možemo i ovdje pisati:

$$A_x(r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon}\frac{J_x(t-\frac{r'}{c})}{r'}d\upsilon \quad (53)$$

$$A_y(r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon}\frac{J_y(t-\frac{r'}{c})}{r'}d\upsilon \quad (54)$$

$$A_z(r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon}\frac{J_z(t-\frac{r'}{c})}{r'}d\upsilon \quad (55)$$

Ili, u sažetom obliku:

$$\vec{A}(r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon}\frac{\vec{J}(t-\frac{r'}{c})}{r'}d\upsilon \quad (56)$$

Cjeloviti zaključak: potencijali polja V i $\vec{A}$ (a samim tim i vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ koji iz njih slijede) na nekom konačnom rastojanju od izvora (naelektrisanja ili struje) nijesu uslovljeni vrijednostima naelektrisanja odnosno struje u tom istom trenutku t, nego vrijednostima naelektrisanja odnosno struje koje su postojale $\frac{r'}{c}$ sekundi ranije!

Dakle, potencijali, odnosno komponente polja, kasne za svojim izvorima, pri čemu je vrijeme kašnjenja dato odnosom $\frac{r'}{c}$. Otuda se ovi **potencijali zovu <u>zakašnjeli</u> ili <u>retardirani potencijali</u>!** Sve ovo fizički znači sledeće: ako na jednom mjestu stvaramo elektromagnetno polje (bilo promjenom naelektrisanja bilo promjenom struje), onda se na rastojanju r' od tog mjesta elektromagnetna perturbacija (poremećaj) širi u okolni prostor, ali ne beskonačnom brzinom, već konačnom brzinom

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (57)$$

Brzina c je, dakle, brzina prostiranja elektromagnetnog poremećaja i ta brzina je konačna i zavisi od elektromagnetnih svojstava sredine u kojoj je poremećaj nastao. Vrijeme kašnjenja $\frac{r'}{c}$ predstavlja vrijeme za koje taj elektromagnetni poremećaj, stvoren na jednom mjestu, pređe rastojanje r', tj rastojanje do izvora do posmatrane tačke je r'. Elektromagnetni poremećaj, dakle, stvoren promjenom struje odnosno naelektrisanja, širi se u formi <u>talasa</u> od izvora ka udaljenim tačkama. Pri tome, kako se vidi iz Pointigove teoreme, taj elektromagnetni talas nosi sa sobom dio energije izvora ka okolnom prostoru.

Pokažimo još da funkcija $f(t-\frac{r'}{c})$ predstavlja u suštini progresivni ili direktni talas. U tom cilju razmotrit ćemo kako se mijenja u prostoru raspodjela, recimo skalarnog potencijala:

Neka u trenutku t_1 na mjestu r_1 potencijal ima vrijednost V_1. Uočimo neki kasniji trenutak t_2 na mjestu r_2 na kome će potencijal imati vrijednost $V_1=V_2$, (s obzirom da se izvor mijenja u vremenu!). Tada će biti

$$t_1 - \frac{r_1}{c} = t_2 - \frac{r_2}{c} \tag{58}$$

$$\frac{1}{c}(r_2 - r_1) = t_2 - t_1 = \Delta t \tag{59}$$

$$r_2 = r_1 + c \cdot \Delta t \tag{60}$$

Pošto su veličine c i Δt pozitivne veličine (>0), slijedi da je

$$r_2 > r_1 \tag{61}$$

Dakle, talas se širi od mjesta sa manjim r ka mjestu da većim r, tj od izvora ka okolnom prostoru! Otuda kažemo da je elektromagnetni talas direktan ili progresivan! Znači argumentu $(t - \frac{r}{c})$ odgovara progresivan talas. Odatle, slijedi: funkciji $f(t + \frac{r}{c})$ odgovara indirektni ili inverzni talas. Kako smo prvobitno razmatrali najjednostavniji slučaj elektromagnetnog polja (u neograničenoj homogenoj sredini) lako je zaključiti da je u tom slučaju moguć samo direktni talas. Indirektni talas može se pojaviti samo onda ako okolna sredina nije homogena (na primjer provodni dio) pa se talas reflektuje i vraća prema izvoru.

Brzina prostiranja talasa u nekoj sredini je, kao što znamo, data relacijom $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Za vakuum ova brzina iznosi:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi}10^{-9}4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \, m/s \tag{62}$$

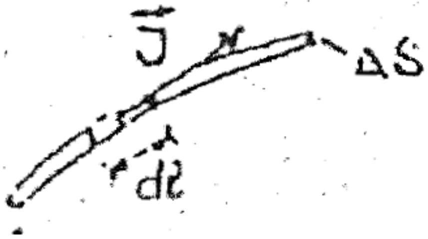
Znatno prije Maksvela, na različite načine, bila je izmjerena brzina svjetlosti, koja je prema tim ranijim mjerenjima iznosila oko $2{,}99 \cdot 10^8 \, m/s$. Iz gotove podudarnosti ovih vrijednosti Maksvel je izveo dalekosežan zaključak: svjetlost nije ništa drugo do **elektromagnetni talas određene učestanosti**!

2.3 C:

Izveli smo da je vektorski magnetni potencijal dat izrazom

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\upsilon} \frac{\vec{J}(t - \frac{r'}{c})}{r'} d\upsilon \tag{63}$$

Izračunajmo vrijednost ovog potencijala za slučaj tankog strujnog provodnika. Imaćemo sledeće relacije: ($d\vec{l}$ i $\vec{J}$ su kolinearni vektori)



$$d\upsilon = \Delta S dl \tag{64}$$

$$\vec{J}d\upsilon = \vec{J}\Delta S dl = \vec{J}\Delta S d\vec{l} = i d\vec{l} \qquad (65)$$

Pa je vektorski magnetni potencijal tankog linijskog provodnika

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_L \frac{i(t-\frac{r'}{c})}{r'}d\vec{l} \qquad (66)$$

Što znači da je magnetni potencijal od jednog elementa dat sa

$$d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{i(t-\frac{r'}{c})}{r'}d\vec{l} \qquad (67)$$

Iz ovog izraza možemo zaključiti: magnetni vektorski potencijal je paralelan strujnom elementu koji ga je izazvao!
Ako kroz tanki linijski provodnik teče, ne ma kakva, već prostoperiodična struja (što je u praksi najčešći slučaj), tj ako je

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (68)$$

Te je

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu I_m}{4\pi}\int_L \frac{\cos\left[\omega(t-\frac{r'}{c})+\varphi_0\right]d\vec{l}}{r'} \qquad (69)$$

Za slučaj prostoperiodične promjene tačkastog naelektrisanja

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (70)$$

$$V(r,t) = \frac{q_m \cos\left[\omega(t-\frac{r}{c})+\varphi_0\right]}{4\pi\varepsilon r} \qquad (71)$$

Za slučaj prostoperiodičnih promjena moguće je uvesti talasnu dužinu talasa kao rastojanje između dvije (najbliže) tačke u kojima se faza talasa razlikuje za 2π. Drugim riječima, talasan dužina je rastojanje između dvije (najbliže) tačke između kojih je polje (komponente polja) opišu puni ciklus promjena.

$$\cos\left[\omega(t-\frac{r+\lambda}{c})+\varphi_0\right] = \cos\left[\omega(t-\frac{r}{c})+\varphi_0-2\pi\right] \qquad (72)$$

$$\omega\frac{\lambda}{c} = 2\pi \qquad (73)$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f} = cT \qquad (74)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ - talasni broj} \qquad (75)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{c}\left[\frac{rad}{m}\right] \qquad (76)$$

3 Klasifikacija elektromagnetnih pojava

Kao što smo do sada utvrdili, elektromagnetno polje u najopštijem slučaju određeno je opštom formo Maksvelovih jednačina:

$$1.\ \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{77}$$

$$2.\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{78}$$

$$3.\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{79}$$

$$4.\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{80}$$

U određenim, specifičnim okolnostima ove jednačine mogu dobiti i specifičnu formu. Specifičnost forme, u stvari, zavisi od toga kako se neka elektromagnetna pojava ponaša u vremenu! Uobičajena klasifikacija elektromagnetnih pojava je sledeća:

1. elektrostatičko i magnetostatičko polje
2. stacionarno električno i stacionarno magnetno polje
3. kvazistacionarno elektromagnetno polje i
4. dinamičko (brzo promjenljivo) elektromagnetno polje.

3.1 elektrostatičko i magnetostatičko polje

Ova polja karakterišu dvije činjenice: prvo - konstantnost svih veličina u vremenu, i drugo - nepostojanje makroskopskih strujnih tokova! Ili, u sažetijem obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{ma}\quad \text{koje}\quad \text{veličine}) = 0 \tag{81}$$

$$\vec{J} = 0 \tag{82}$$

Na taj način, Maksvelov sistem od četiri jednačine svodi se na dva sistema od po dvije diferencijalne jednačine:

1. sistem:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \text{ , (druga jednačina)} \tag{83}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \text{ , (četvrta jednačina)} \tag{84}$$

2. sistem:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = 0 \text{ , (prva jednačina)} \tag{85}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \text{ , (treća jednačina)} \tag{86}$$

1. sistem odnosi se isključivo na električno polje i to specijalno na elektrostatičko polje, a 2. sistem na magnetno i to magnetostatičko polje.

Važno je naglasiti da između ova dva polja ne postoji <u>matematička</u> veza!

1. sistem, dakle, odnosi se na ono električno polje koje potiče od vremenski i prostorno nepromjenljivog naelektrisanja. 2. sistem, dakle, odnosi se na ono magnetno polje koje potiče od stalnih magneta (odnosno od Amperovih ili mikro struja).
Na kraju zaključimo: kako su ova dva polja međusobno potpuno nezavisna polja ta činjenica je i uslovila da su se ova dva polja (istorijski gledano) proučavala i tretirala sasvim nezavisno jedno od drugog.

3.2 Stacionarno polje

Zajednička crta ovog polja sa prethodnim jeste u činjenici što i ovdje važi karakteristika da vremenske promjene bilo koje veličine nema. Dakle,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{ma koje veličine}) = 0 \tag{87}$$

Dok razlika sa prethodnim poljima jeste u činjenici što ovdje postoji makroskopski strujni tok, istina stacionarnog karaktera! Dakle,

$$\vec{J} \neq 0 \tag{88}$$

Time se sistem Maksvelovih jednačina iz opšteg oblika raspada na dva specijalna sistema od po dvije jednačine:
1. sistem

$$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{89}$$

$$\text{div}\,\vec{D} = \rho \tag{90}$$

2. sistem

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} \tag{91}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \tag{92}$$

Prvi sistem jednačina određuje takozvano stacionarno električno polje, tj polje koje vlada među naelektrisanjima u stacionarnom kretanju. Kao što se vidi, ovaj sistem je identičan onom za elektrostatičko polje.
Drugi sistem jednačina karakteriše stacionarno magnetno polje koje potiče od stacionarnih (jednosmjernih i vremenski nepromjenljivih) struja.
Međutim, ova polja nijesu više međusobno nezavisna. Matematička (formalna) veza data je izrazom:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{93}$$

Ipak, ni u matematičkom smislu nije ova veza „jaka“ kao što je jaka u opštem slučaju. Dakle, suštinska veza između ova dva polja ne ogleda se u njihovoj matematičkoj vezi već u sledećoj činjenici (fizička veza): svako stacionarno pokretno naelektrisanje (između čijih čestica vlada stacionarno električno polje) uvijek izaziva u svojoj okolini stacionarno magnetno polje!
Međutim, kako se u najvećem broju slučajeva radi o unaprijed zadatoj raspodjeli struje $\vec{J}$, ova dva sistema, odnosno ova dva polja mogu se potpuno odvojeno razmatrati.

3.3 Dinamičko (brzo promjenljivo) elektromagnetno polje

Ovo je najopštija forma elektromagnetnog polja. To polje potiče od ma kako promjenljivog naelektrisanja odnosno struje, i za njega važi najopštija forma Maksvelovih zakona. Karakteristika ovog polja je da ima dvije komponente, električnu i magnetnu, koje su međusobno suštinski nerazdvojno vezane, kao i činjenica da se ovo polje u formi talasa širi od mjesta nastanka i da pri tome nosi elektromagnetnu energiju (kao dio energije izvora).
U mnogim praktičnim slučajevima, kada se izvori polja (naelektrisanja i struja) ne mijenjaju tako brzo u vremenu, moguće je, barem u jednom dijelu prostora, zanemariti efekat kašnjenja – konačnost prostiranja elektromagnetnog polja! Takva polja su nazvana **kvazistacionarna** („toboš" stacionarna). Kod takvih polja je, dakle

$$\rho(t-\frac{r}{c}) \approx \rho(t) \tag{94}$$

$$\vec{J}(t-\frac{r}{c}) \approx \vec{J}(t) \tag{95}$$

Međutim, očigledno je da se kvazistacionarnost jednog polja (dakle, ma kakvog) mora vezivati za rastojanje! (jer na velikim rastojanjima r/c ne možemo zanemarivati!)
Za slučaj prostoperiodičnih polja moguće je dosta precizno utvrditi kriteriju kvazistacionarnosti polja. Naime,

$$\cos\omega(t-\frac{r}{c}) \approx \cos\omega t \tag{96}$$

$$\omega\frac{r}{c} \approx 0 \tag{97}$$

$$2\pi f\frac{r}{c} \approx 0 \tag{98}$$

$$2\pi\frac{r}{\lambda} \approx o \quad \text{, ili (približno)} \tag{99}$$

$$\frac{r}{\lambda} \approx 0 \tag{100}$$

$$r \ll \lambda \tag{101}$$

Ovo je **uslov kvazistacionarnosti** prostoperiodičnog polja!
Dakle, unutar domena čije su dimenzije znatno manje od dimenzije talasa (tj talasne dužine) vrijeme kašnjenja je toliko malo da se može zanemariti!
To se najbolje uočava iz sledeća dva primjera
1. primjer iz Energetike:

$$f = 50Hz \tag{102}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{50} = 6\cdot 10^4 m = 6000km \quad \text{! (gotovo uvijek } r \ll \lambda \text{)} \tag{103}$$

2. primjer iz Elektronike:

$$f = 10^9 Hz \tag{104}$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 0,3m \;\; ! \qquad (105)$$

Na rastojanju od $0,3m$ možemo zanemariti efekat kašnjenja, ali, izvan toga domena, ne!